Divergencia

$\nabla \cdot = \frac{\partial}{\partial x}\widehat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\widehat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\widehat{k}$

Rotacional

$\nabla \times = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

Leyes básicas de la teoría electromagética

Ley de inducción de Faraday

$\oint_C \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\, \overrightarrow{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\, \overrightarrow{S}$

Ley de Gauss

$\oint_A \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\, \overrightarrow{S} = \frac{1}{\epsilon} \oint_V \rho dV$

Ley de Gauss magnética

$\oint_A \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\, \overrightarrow{S} = 0$

Ley circuital de Ampère

$\oint_c \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\, \overrightarrow{l} = \mu \int_A \left[\overrightarrow{J} + \epsilon \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right] \cdot d\overrightarrow{S}$

Vamos a escribir estas ecuaciones en forma diferencial, que son las más prácticas. Usaremos dos teoremas de cálculo vectorial, el de divergencia de Gauss y el de Stokes.

Teorema de la Divergencia de Gauss

$\oint_A \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \oint_V \nabla \cdot \overrightarrow{F} dV$

Teorema de Stokes

$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l} = -\oint_A \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$
.

Aplicando el teorema de Stokes a la intensidad del campo eléctrico, tenemos

$$\oint E \bullet d\overrightarrow{l} = \int_A \nabla \times \overrightarrow{E} \times d\overrightarrow{S}$$

que al comparar con la ec. 1, se tiene que

$$\oint E \bullet d\overrightarrow{l} = \int_A \nabla \times \overrightarrow{E \times} d\overrightarrow{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_A \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S}$$

Válido para todas las superficies limitadas por la trayectoria C, lo que implica que se da si los integrandos son iguales entre sí:

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

Una aplicación similar del teorema de Stokes al campo $\overrightarrow{B}$ da como resultado

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \mu \left[\overrightarrow{J} + \epsilon \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right]$$

El teorema de divergencia de Gauss aplicado a la intensidad del campo eléctrico sería

$$\oint_A \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = \int_V \nabla \cdot \overrightarrow{E} dV$$

y la Ley de Gauss nos indica que

$$\int_V \nabla \cdot \overrightarrow{E} dV = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho dV$$

y como esto es válido para cualquier volumen, los integrandos deben ser iguales

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = \rho / \epsilon$$

De la misma manera,, el teorema de la divergencia de Gauss aplicado al campo B, resulta

$$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$$

Leyes básicas de la teoría electromagética

Ley de inducción de Faraday

$\oint_C \overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{l} = -\frac{d}{dt}\oint_A \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}$ $\qquad \nabla\times\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$ ....A

Ley de Gauss

$\oint_A \overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{S} = \frac{1}{\epsilon}\oint_V \rho dV$ $\qquad \nabla\cdot\overrightarrow{E} = \rho/\epsilon$ ....B

Ley de Gauss magnética

$\oint_A \overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{S} = 0$ $\qquad \nabla\cdot\overrightarrow{B} = 0$ C

Ley circuital de Ampère

$\oint_c \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{l} = \mu\oint_A \left[\overrightarrow{J} + \epsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right]\cdot d\overrightarrow{S}$ $\qquad \nabla\times\overrightarrow{B} = \mu\left[\overrightarrow{J} + \epsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right]$ ....D

Como el campo dentro del material es afectado por la interacción de éste con el material mismo, debemos definir una nueva cantidad, el vector desplazamiento $\overrightarrow{D}$:

$\overrightarrow{D} = \epsilon_o\overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}$

$\epsilon\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E} + 4\pi\overrightarrow{P}$

En un medio isótropo, homogéneo, lineal, en reposo, $\overrightarrow{E}$ y $\overrightarrow{P}$ están en la misma dirección y son proporcionales y $\overrightarrow{J} = \sigma\overrightarrow{E}$ (ley de Ohm).

Ecuación de onda

Tomando el rotacional de la ecuación D,

$$\nabla\times\left(\nabla\times\overrightarrow{B}\right) = \mu\nabla\times\left(\sigma\overrightarrow{E}\right) + \mu\epsilon\nabla\times\left(\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\overrightarrow{B}\right) = \mu\sigma\left(\nabla\times\overrightarrow{E}\right) + \mu\epsilon\left(\frac{\partial(\nabla\times\overrightarrow{E})}{\partial t}\right)$$

$\nabla\times(\nabla\times) \equiv \nabla(\nabla\cdot) - \nabla^2$ $\qquad$ y $\qquad \nabla\times\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$

Por lo tanto,

$$\nabla\left(\nabla\cdot\overrightarrow{B}\right) - \nabla^2\overrightarrow{B} = -\mu\sigma\left(\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right) - \mu\epsilon\left(\frac{\partial^2\overrightarrow{B}}{\partial t^2}\right)$$

$$\nabla^2\overrightarrow{B} = \mu\sigma\left(\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right) + \mu\epsilon\left(\frac{\partial^2\overrightarrow{B}}{\partial t^2}\right)$$

De igual manera, tomando el rotacional de A,

$$\nabla \times \left(\nabla \times \overrightarrow{E}\right) = -\left(\frac{\partial \nabla \times \overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = -\mu\sigma \left(\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) - \mu\epsilon \left(\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}\right)$$

$$\nabla \left(\nabla \cdot \overrightarrow{E}\right) - \nabla^2 \overrightarrow{E} = -\mu\sigma \left(\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) - \mu\epsilon \left(\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}\right)$$

$$\nabla \left(\rho/\epsilon\right) - \nabla^2 \overrightarrow{E} = -\mu\sigma \left(\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) - \mu\epsilon \left(\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}\right)$$

En un medio no cargado y no conductor, $\rho = 0$, $\sigma = 0$, lo que reduce las ecuaciones anteriores a

$$\nabla^2 \overrightarrow{E} = \mu\epsilon \left(\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}\right)$$

$$\nabla^2 \overrightarrow{B} = \mu\epsilon \left(\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2}\right)$$

.

De manera similar, hay una ecuación de onda para H y D.

En el espacio vacío, $\rho = 0$, $\sigma = 0$, $\kappa_e = 1$, $\kappa_m = 1$, con lo que $\mu \rightarrow \mu_0$, $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$

$$\nabla^2 \overrightarrow{E} = \mu_0\epsilon_0 \left(\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}\right)$$

$$\nabla^2 \overrightarrow{B} = \mu_0\epsilon_0 \left(\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2}\right)$$

Comparando con la ecuación de onda para una perturbación viajera,

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\right)$$

serán iguales si $v = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$.

Maxwell usó los valores medidos por Leipzig y Weber:

$\epsilon\mu \cong (8.85x10^{12}s^2C^2/m^3Kg)(4\pi x10^{-7}mKg/C^2$

$\epsilon\mu \cong 11.12x10^{-18}s^2/m^2$

$\rightrightarrows v = 3x10^8 m/s$, que coincide muy bien con lo medido por Fizeau (1849).

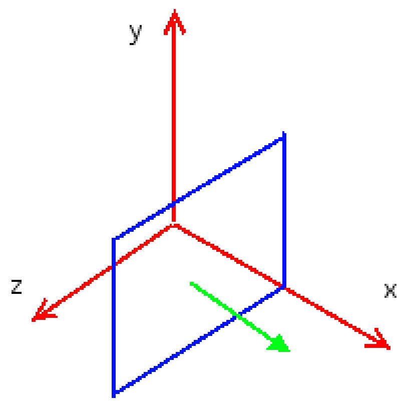

Figure 1: Onda plana viajando en +x

La luz es una onda transversal

Consideremos una onda plana, $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(x,t)$, viajando en la dirección positiva de x.

Sabemos que $\nabla \cdot \overrightarrow{E} = 0$, en el vacío, sin cargas, $\rho = 0$.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \rho = 0$$

lo que implica que $\frac{\partial \overrightarrow{E_x}}{\partial x} = 0$, esto es $\overrightarrow{E_x} = constante$, lo que no nos interesa, por lo tanto el campo es transversal.

Definiendo a $\overrightarrow{E}$ en la dirección de y $\overrightarrow{E} = \widehat{j} E_y(x,t)$

Como $\nabla \times \overrightarrow{E}$=-$\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$,

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$-\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

entonces $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ donde B_x, B_y son constantes, lo que no es de nuestro interés, por lo que $\overrightarrow{B} = \widehat{k} B_z(x,t)$

Esto es válido para cualquir onda plana, en particular para las ondas armónicas

$$E_y(x,t) = E_{oy} cos\left[\omega(t - x/c) + \varphi_0\right]$$

Dado que $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$,

$$B_z = -\int \frac{\partial \overrightarrow{E_y}}{\partial x} dt = -\frac{E_{0y}}{c} \int sen\left[\omega(t - x/c) + \varphi\right] dt,$$

$$B_z = \frac{E_{0y}}{c} cos\left[\omega(t - x/c) + \varphi\right] = \frac{E_y}{c}$$

con lo que $E_y = cB_z$.

En medios conductores, hay que hacer la substitución de los parámetros:
del vacío .... al material
$\mu_0\epsilon_0$.................... $\mu\epsilon$
$c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ ....$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$

y se define al índice de refracción

$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \equiv \sqrt{\kappa_e\kappa_m}$

A frecuencias muy altas, como la de la luz, $10^{15}Hz$, $\kappa_m = 1$
$n \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \equiv \sqrt{\kappa_e}$

Oscilador de Lorentz

El movimiento de un electrón, sujeto a un campo eléctrico externo estará descrito por la ecuación

$$m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} + m\Gamma\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} + m\omega_0^2\overrightarrow{r} = -e\overrightarrow{E}_{loc}$$

$m\Gamma\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$ es el amortiguamiento viscoso
$m\omega_0^2\overrightarrow{r}$ es la ley de Hooke, la fuerza de restauración de un resorte.

Se asume que la masa del electrón es despreciable comparada con la del núcleo.

La fuerza magnética $(-e\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{b}/c)$ se desprecia, ya que $v \ll c$

El campo local $\overrightarrow{E_{loc}}$ es armónico $\sim e^{-i\omega t}$

Si suponemos una solución del tipo $r = r_0cos(\omega t)$, que substituimos en la ecuación de movimiento, la satisfará si

$$r = \frac{-eE_{loc}/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\Gamma\omega}$$

Y el dipolo inducido es

$$\overrightarrow{p} = e\overrightarrow{r} = \frac{-e^2E_{loc}}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\Gamma\omega}$$

Se puede considerar que el desplazamiento $\overrightarrow{r}$ es tan pequeño que $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{E_{loc}}$ son proporcionales

$$\overrightarrow{p} = \widehat{\alpha}(\omega)E_{loc}$$

donde $\alpha(\omega)$ es la polarizabilidad

$$\widehat{\alpha}(\omega) = \frac{-e^2}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\Gamma\omega}$$

$\overrightarrow{p}$ puede diferir en fase respecto al campo local, E_{loc}.

Si hay N átomos por unidad de volumen, la polarización macroscópica es

$$\overrightarrow{P} = N \langle \overrightarrow{p} \rangle = N\widehat{\alpha} \left\langle \overrightarrow{E_{loc}} \right\rangle = \chi_e \overrightarrow{E}$$